

Logique de la plausibilité

Marc Halévy
Décembre 2009

Dès que l'on sort des cas faciles, la logique aristotélicienne devient très vite inopérante. Mais au-delà d'elle, lorsque "vrai" et "faux" se mélangent, d'intéressants paradoxes et de folles apories émergent. Démonstration ...

Soit une proposition quelconque. La logique classique dira qu'elle est soit vraie (valeur 1), soit fausse (valeur 0).

En réalité, on n'en sait rien. Elle a une certaine probabilité d'être plus ou moins vraie (cfr. Rudolf Carnap -1945). Cette probabilité p est un nombre compris entre 0 et 1, et traduit la plausibilité (objective ou subjective, peu importe ici) de la proposition. Plus p est proche de 0, plus la proposition est probablement fausse. Etc.

Si l'on prend deux propositions de probabilité respective p_1 et p_2 , la plausibilité de leur combinaison par ET (donc qu'elles soient plausibles en même temps) sera évaluée par le produit de leurs valeurs, c'est-à-dire en multipliant les deux probabilités $p_1.p_2$. Comme ses deux facteurs sont inférieurs à 1, cette plausibilité combinée sera un nombre inférieur à chacun de ces facteurs ($1/3 \times 1/2 = 1/6 < 1/3 < 1/2$).

Par récursivité, il est facile de démontrer que la plausibilité de toute proposition complexe, combinant un grand nombre de propositions simples liées par des ET, tend rapidement vers 0 et est donc fausse.

Prenons un ensemble constitué d'un grand nombre de proposition très plausible, la plausibilité de l'ensemble par ET sera quasi nulle (exemple : $0.9^{50} = 0.005$).

Premier paradoxe.

Le cas du OU qui additionne les valeurs logiques, pose lui un autre problème : il suffit d'accoler très peu d'alternatives pour que la plausibilité dépasse 1 et que l'on soit dans la certitude absolue, ce qui est ... faux.

Prenons un exemple : la plausibilité de la proposition "cet humain est une femme" est de 0.5, et la plausibilité de la proposition "cette pièce va tomber sur face" est également de 0.5.

Il est évident que la proposition combinée "cet humain est une femme OU cette pièce va tomber sur face" n'est en aucune manière une certitude (c'est-à-dire toujours vraie et vérifiée), même si : $0.5 + 0.5 = 1$.

Il faut donc renoncer à simplement additionner les valeurs logiques et les probabilités et poser, par exemple, que le OU aboutit à la moyenne des valeurs de plausibilité, en l'occurrence : $(p_1+p_2)/2$. Selon cette définition, par récursivité, la combinaison par OU d'un grand nombre de propositions va aboutir à l'indécidabilité absolue dont la plausibilité moyenne est 0.5 .

Second paradoxe.

Troisième paradoxe : si on considère que la totalité de la connaissance est un ensemble énorme d'un très grand nombre de propositions combinées entre elles par des ET et des OU, on démontre facilement que le tout tend vers une plausibilité nulle dans tous les cas de figure !

*
* *