

## Esquisse d'une théorie de la valeur économique des réseaux

*Marc Halévy  
Juillet 2008*

### Objectif

Une "loi" empirique dit que la valeur économique d'un réseau croît comme le carré du nombre de ses nœuds. Il s'agit ici l'approfondir cette piste et d'esquisser une approche théorique de la valeur économique des réseaux.

### Définitions

J'appelle "réseau" un ensemble de nœuds reliés entre eux.

J'appelle "canal" ce qui relie deux nœuds du réseau.

J'appelle "lien" chacun des deux sens de circulation d'un canal.

### Calcul du nombre de canaux et de liens d'un réseau

Il semble de bon sens de prétendre que la valeur économique d'un réseau est proportionnelle au nombre de ses canaux et liens. En effet, d'une part, un ensemble de nœuds sans aucun lien entre eux n'a évidemment aucune valeur en tant que réseau et, d'autre part, un réseau ne peut avoir une quelconque valeur économique que dans la stricte mesure où il permet des échanges entre ses nœuds c'est-à-dire qu'il possède des liens actifs.

Pour ces raisons, par définition, j'appelle "valeur statique"  $V_S$  le nombre de liens d'un réseau. J'appelle "réseau maximal" sur un ensemble donné de nœuds, le réseau de ces nœuds où tous les liens existent, où chaque nœud est relié à tous les autres.

La valeur maximale d'un réseau de  $N$  nœuds est donnée par :

$$V_S = N(N-1)$$

Il faut remarquer que, si l'on ne tient compte que des canaux et non des liens, cette valeur est divisée par deux :  $V_S(\text{canaux}) = V_S(\text{liens})/2$ .

### Valeurs des réseaux hiérarchiques

J'appelle "réseau hiérarchique", un réseau où chaque nœud possède au moins 1 et au plus 2 canaux et où il n'existe aucune boucle fermée.

Dans un réseau hiérarchique, si  $s$  est le nombre moyen de subalternes par maître hiérarchique, alors le nombre  $N$  de nœuds est  $N = 1 + s + s^2 + s^3 + \dots$  et le nombre  $V_S$  de liens est égal à  $V_S = 2.(s + s^2 + s^3 + \dots)$  ; ce qui donne :  $V_S = 2.(N-1)$  dont les deux illustrations triviales sont :

- le réseau en chaîne linéaire (les nœuds sont simplement concaténés à la queue-leu-leu ; chaque nœud, sauf le premier et le dernier, possède un et un seul maître et un et un seul subalterne) :  $V_S = 2.(N-1)$
- le réseau en étoile élémentaire (tous les nœuds sont reliés à un seul et même nœud à l'exclusion de tout autre ; il y a un seul maître et tous les autres sont ses subalternes) :  $V_S = 2.(N-1)$

Il est à remarquer que les réseaux hiérarchiques sont les plus pauvres et qu'ils correspondent à la valeur minimale d'un réseau.

### **Valeur infrastructurelle ou statique d'un réseau**

De ce qui précède, on peut inférer que la valeur statique d'un réseau - c'est-à-dire sa valeur infrastructurelle qui est indépendante de la quantité et de la qualité de ce qui circule dans ses canaux - est telle que :

$$2. (N - 1) \leq V_S \leq N. (N - 1)$$

Cette inéquation montre que, bien sûr, plus le nombre de nœuds est élevé, plus la valeur du réseau sera élevée aussi. On remarque que la valeur maximale d'un réseau croît bien comme le carré du nombre de ses nœuds, alors que la valeur d'un réseau hiérarchique est proportionnelle au nombre de ses nœuds.

De là, aussi, on peut conclure que ce sont les boucles qui donnent de la survaleur à un réseau : ce sont elles qui font sortir la valeur de la linéarité et qui amplifient l'effet multiplicateur du réseau. Cela n'est pas étonnant dès lors où l'on se rend compte que les boucles dans un réseau sont typiquement des propriétés émergentes de ce réseau, c'est-à-dire des propriétés globales qui appartiennent à la totalité du réseau sans appartenir à aucun de ses nœuds. On a là un effet holistique<sup>1</sup> typique.

Si l'on appelle "chemin univoque" un chemin sur le réseau qui relie deux nœuds quelconque sans passer deux fois par un même nœud, alors, on comprend qu'un réseau hiérarchique est un réseau où il n'existe qu'un et un seul chemin univoque entre deux quelconques de ses nœuds. Ce n'est évidemment pas le cas dès lors qu'il y a des boucles possibles dans le réseau. De là on peut conclure que la complexité - et la valeur - d'un réseau croît comme le nombre de chemins univoques possibles entre deux quelconques de ces nœuds.

Si l'on définit la complexité statique moyenne d'un réseau par  $K_S$  qui soit le nombre moyen de chemins univoques possibles entre deux quelconques de ses nœuds, alors, pour un réseau hiérarchique,  $K_S = 1$ .

Pour le réseau maximal, par contre, on peut calculer que :  $K_S = 2^N$ .

Ainsi, pour tout réseau de  $N$  nœuds, sa complexité  $K_S$  est telle que :

$$1^N \leq K_S \leq 2^N$$

Il est alors intéressant de regarder le rapport qu'il y a entre la valeur  $V_S$  et la complexité  $K_S$  d'un réseau maximal.

On trouve sans problème que :

$$V_S = A \cdot \ln K_S \cdot \ln \frac{K_S}{2}$$

où  $A$  est une constante qui, pour un réseau maximal, est égale à  $(\ln 2)^{-2} = 2,081 \cong 2$ .

---

<sup>1</sup> Il y a effet holistique dès que le tout vaut plus que la somme de ses parties. Tapez une équation ici.

Retenons donc que la valeur maximale d'un réseau croît comme le carré du logarithme de sa complexité statique.

### Valeur fonctionnelle ou dynamique d'un réseau

#### Définitions complémentaires

J'appelle "flux" tout ce qui circule sur un lien entre deux nœuds.

J'appelle "réseau distributif" un réseau sur les canaux duquel les flux ne circulent que dans un seul sens, toujours le même.

J'appelle "réseau interactif" un réseau sur les canaux duquel les flux circulent dans les deux sens.

#### Caractéristiques d'un flux

Un flux entre deux nœuds d'un réseau possède trois caractéristiques distinctes : son intensité  $I$ , sa qualité  $Q$  et sa fréquence  $F$ .

L'intensité et la fréquence d'un flux sont des notions triviales totalement similaires à celle utilisées en électricité.

La notion de qualité d'un flux est plus délicate à cerner.

Prenons l'exemple d'un flux d'informations numérisées entre un émetteur et un récepteur.

L'intensité du flux est la quantité d'information transmise (par unité de temps, par exemple, sur le canal entre les nœuds ; elle se mesurera en bauds, par exemple, c'est-à-dire en bits par seconde (seulement lorsque l'information est codée en 0 et 1).

La fréquence du flux est le nombre d'émissions d'informations par unité de temps ; elle se mesurera, par exemple, en hertz ou en paquets par seconde.

Mais chaque paquet de bits peut être plus ou moins porteur de sens, d'ordre, de structure, bref, de négentropie pour le récepteur : c'est là que pointe la notion de qualité. Celle-ci n'est pas indépendante des deux autres caractéristiques car trop d'intensité noie la qualité ("trop d'informations tue l'information") et une fréquence trop élevée empêche la circulation des messages très structurés et denses.

Cette corrélation entre les trois caractéristiques fondamentales des flux, induit l'idée qu'il doit y avoir, entre elles, une relation d'optimisation.

On peut définir la complexité dynamique globale  $K_D$  d'un réseau comme proportionnelle à l'intensité moyenne des flux qui le parcourent et à la qualité moyenne de ces flux, et inversement proportionnelle à la fréquence moyenne de cette circulation.

On exprimera cela, par définition, par :

$$K_D = Q.I/F$$

$K_D$  est un nombre sans dimension car, par définition,  $I$  est du type "bit par seconde",  $F$  est du type "négentropie par seconde" et  $Q$  est du type "négentropie par bit".

En physique complexe, on peut montrer (cfr. Halévy : "Physique complexe") que l'*optimum naturel* de fonctionnement du système correspond à l'équation :

$$(\delta \ln)^2 K_D = 0$$

où  $\delta$  représente l'opérateur variationnel.

### Valeur dynamique du réseau

A partir de la considération d'un réseau maximal, on a vu que la valeur statique du réseau était fonction de sa complexité architecturale :

$$V_S = A \cdot \ln K_S \cdot \ln \frac{K_S}{2}$$

Par analogie, il est tentant de prendre une forme similaire pour exprimer la relation qui existerait entre la valeur dynamique du réseau et sa complexité comportementale c'est-à-dire son activité globale. Cela donnerait :

$$V_D = B \cdot \ln K_D \cdot \ln \frac{K_D}{2}$$

Cette analogie est-elle légitime ?

Si l'on veut connaître la valeur dynamique optimale  $V_D$  du réseau, il faut calculer pour quelle valeur de  $K_D$  la variation de  $V_D$  s'annule.

On calcule aisément que :

$$dV_D = B \cdot \frac{dK_D}{K_D} \cdot \ln \frac{K_D}{2}$$

On remarque donc que la valeur dynamique est optimale (variation nulle) si le logarithme de la complexité dynamique est optimal, ce qui correspond bien à la solution première de l'équation relevée plus haut, issue de la physique complexe :  $(\delta \ln)^2 K_D = 0$ .

Sans être ni une preuve, ni une démonstration, ce résultat tend à encourager la légitimation de l'équation tirée par analogie :

$$V_D = B \cdot \ln K_D \cdot \ln \frac{K_D}{2}$$

### Valeur globale d'un réseau

#### Deux notions de complexité

Dans la partie concernant la valeur infrastructurelle statique, on avait vu apparaître un paramètre de complexité  $K_S$  qui caractérisait la complexité statique (architecturale ou infrastructurelle) du réseau (c'était le nombre moyen de chemins univoques possibles entre deux nœuds quelconques du réseau).

On a vu à présent apparaître un nouveau paramètre de complexité  $K_D$  qui caractérise la complexité dynamique (comportementale ou fonctionnelle) du réseau ou, si l'on préfère, son activité globale (Q.I/F).

Ces deux niveaux de complexité sont toutes deux pourvoyeuses de valeur au réseau, selon des relations mathématiques similaires, mais selon des modalités différentes puisque le premier exprime ce qu'est le réseau et que le second exprime ce que l'on en fait.

### Equation de la valeur

L'équation de la valeur en fonction de la complexité, telle qu'utilisée ci-dessus, peut encore s'écrire :

$$V = \alpha \cdot \ln K(\alpha \cdot \ln K - 1)$$

où, pour un réseau maximal,  $\alpha$  valait  $1/\ln 2$  (soit environ 1,44).

Partant de cette équation générale et sachant que les complexités se composent en se multipliant, il vient pour la valeur totale d'un réseau :

$$V(\text{totale}) = \alpha \cdot \ln (K_S K_D) \cdot [\alpha \cdot \ln (K_S K_D) - 1]$$

On voit que cette formule de valeur est fortement non linéaire (avec des couplages forts et des propriétés émergentes entre tous les aspects du réseau - et entre sa part statique et sa part dynamique en particulier).

On est là bien loin de l'élémentaire additivité des valeurs comme la pratiquerait un comptable.

\*

\* \*